整数論における密度定理と確率論における極限定理 -大数の法則,中心極限定理…

著者	高信 敏
著者別表示	Takanobu Satoshi
雑誌名	平成14(2002)年度 科学研究費補助金 基盤研究(C) 研究成果報告書
巻	2001-2002
ページ	10p.
発行年	2003-03
URL	http://doi.org/10.24517/00052886

整数論における密度定理と確率論における極限定理
— 大数の法則，中心極限定理 ...

（課題番号　１３６４０１０８）

平成１３年度～平成１４年度科学研究費補助金　（基盤研究（C）（2））

研 究 成 果 報 告 書

平成１５年3月

研究代表者　　高信 敏
（金沢大学大学院自然科学研究科　助教授）

KAKEN
2002
52

整数論における密度定理と確率論における極限定理
— 大数の法則，中心極限定理 …

（課題番号　１３６４０１０８）

平成１３年度～平成１４年度科学研究費補助金　（基盤研究（Ｃ）（２））

研 究 成 果 報 告 書

平成１５年３月

研究代表者　　高信 敏
（金沢大学大学院自然科学研究科　助教授）

はしがき

本研究のそもそもの発端は「2整数が互いに素になる確率 = $\frac{6}{\pi^2}$」を主張するDirichletの密度定理である．これを初めて聞いた (知った) ときの第一印象は，“これは大数の法則だ！” であった．これの数学的な根拠は何1つなくただ理由(わけ)もなくこう思ったのである．そして “次のステップとして中心極限定理は成り立つのかなぁ？” という疑問を抱いた．この “思い” と “問い” に対して

- 実際，大数の (強) 法則として捉えられること，
- しかし，普通の意味での中心極限定理は成立しないこと，
- その代わりに面白い興味ある現象が現われ，それを完全に解明できること，
- そして，その奥にある (はずの) 極限定理の一部を垣間見ることができること

等(など)の成果が得られた．（詳細については研究成果等の項を参照されたい．）

本冊子は，その研究成果報告書である．

研究組織

研究代表者:	高信敏	(金沢大学大学院自然科学研究科助教授)
研究分担者:	藤本坦孝	(金沢大学理学部教授)
	一瀬孝	(金沢大学理学部教授)
	中尾愼太郎	(金沢大学理学部教授)
	藤曲哲郎	(金沢大学理学部教授)
	田村博志	(金沢大学理学部助教授)
	伊藤秀一	(金沢大学理学部教授)

研究経費

	直接経費	間接経費	合計
平成13年度	1,700 千円	0 千円	1,700 千円
平成14年度	1,600 千円	0 千円	1,600 千円
合計	3,300 千円	0 千円	3,300 千円

研究発表

(1) 学会誌等

高信敏 Satoshi Takanobu

1. (with Hiroshi Sugita)
「2整数が互いに素になる確率」の確率論的見方 — 数値実験による予想の検証 —,
数理解析研究所講究録 **1240**, 224–232, 2001.

2. On the strong-mixing property of skew product of binary transformation on 2-dimensional torus by irrational rotation,
Tokyo J. Math. **25**, 1–15, 2002.

3. (with Hiroshi Sugita)
The probability of two integers to be co-prime, revisited — on the behavior of CLT-scaling limit,
to appear in *Osaka J. Math.*

藤本坦孝 Hirotaka Fujimoto

1. A Family of hyperbolic hypersurfaces in the complex projective space,
Complex Variables **43**, 273–283, 2001.

2. On uniqueness polynomials for meromorphic functions,
to appear in *Nagoya Math. J.*, 2003.

一瀬孝 Takashi Ichinose

1. Norm convergence of the Lie–Trotter–Kato product formula and imaginary-time path integral,
J. Korean Math. Soc. **38**, 337–348, 2001. (Proceedings of International Conference on Feynman Integrals and Related Topics, Seoul, July 12–15, 1999)

2. (with Hideo Tamura)
The norm convergence of the Trotter–Kato product formula with error bound,
Commun. Math. Phys. **217**, 489–502, 2001.

3. (with Hideo Tamura)
On the norm convergence of the Trotter–Kato product formula with error bound,
In: Partial Differential Equations and Spectral Theory (PDE 2000 Conference in Clausthal, Germany, July 24–28, 2000), edited by M. Demuth and B-W. Schulze, Operator Theory: Advances and Applications **126**, 149–154, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin 2001.

4. (with Hideo Tamura, Hiroshi Tamura and Valentin A. Zagrebnov)
Note on the paper "The norm convergence of the Trotter–Kato product formula with error bound" by Ichinose and Tamura,
Commun. Math. Phys. **221**, 499–510, 2001.

5. (with Pavel Exner)
Geometrically induced spectrum in curved leaky wires,
J. Phys. A: Math. Gen. **34**, 1439–1450, 2001.

6. (with Hideo Tamura)
On the norm convergence of the Trotter–Kato product formula with error bound,
数理解析研究所講究録 **1208**, 128–134, 2001.

7. (with Hideo Tamura)
On the norm convergence of the selfadjoint Trotter–Kato product formula with error bound,
Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.) **112**, 99–106, 2002; Special Issue on Spectral and Inverse Spectral Theory.

8. (with Brian Jefferies)
The propagator of the radial Dirac equation,
J. Math. Phys. **43**, 3963–3983, 2002.

9. (with H. Neidhardt and V. A. Zagrebnov)
Operator norm convergence of Trotter–Kato product formula,

to appear in Proceedings of Ukrainian Mathematical Congress–2001: International Conference on Functional Analysis, Kiev, Ukraine, 2001.

10. The Selfadjoint Lie–Trotter–Kato product formula in operator norm and time-sliced approximation to imaginary-time path integral,
to appear in the Proceedings of the International Symposium "The Mathematical Legacy of Feynman's Path Integral Approach: Analysis, Geometry and Probability", Lisbon/ Portugal, June 2002.

11. (with H. Neidhardt and V. A. Zagrebnov)
Trotter–Kato product formula and fractional powers of self-adjoint generators,
to appear in *J. Functional Analysis.*

12. Time-sliced approximation to path integral and Lie–Trotter–Kato product formula,
to appear in the Festschrift "*Qarden of Quanta*" in honor of Professor Hiroshi Ezawa for his seventieth birthday, World Scientific.

13. 経路積分—解析学の立場から,
臨時別冊・数理科学『数学の未解決問題』, 72–80, サイエンス社, 2003 年 1 月.

14. (with Pavel Exner)
Product formula related to quantum Zeno dynamics,
Preprint.

中尾愼太郎 Shintaro Nakao

1. Girsanov formula in Dirichlet space theory,
The Science Reports of Kanazawa University **46**, 1–7, 2001.

藤曲哲郎 Tetsuo Fujimagari

1. Probabilistic density-dependent population models with pollution,
to appear in 数理解析研究所講究録.

田村博志 Hiroshi Tamura

1. (with Takashi Ichinose, Hideo Tamura and Valentin A. Zagrebnov)
Note on the paper "The norm convergence of the Trotter–Kato product formula with error bound" by Ichinose and Tamura,
Commun. Math. Phys. **221**, 499–510, 2001.

2. (with Christian Gruber and Valentin A. Zagrebnov)
Berezinsky-Kosterlitz-Thouless order in two-dimensional $O(2)$-ferrofluid,
J. Stat. Phys. **106**, 875–893, 2002.

(2) 口 頭 発 表

高信敏　Satoshi Takanobu

1. (with Hiroshi Sugita)
   「2 整数が互いに素になる確率」の確率論的見方 — 大数の強法則とその精密化 —, 九州確率論セミナー, 九州大学, 2001 年 6 月 8 日.

2. (with Hiroshi Sugita)
   「2 整数が互いに素になる確率」の確率論的見方 — 数値実験による予想 —, 短期共同「確率数値解析に於ける諸問題」, 数理解析研究所, 2001 年 7 月.

3. 完全加法的関数の確率拡張に対する極限定理, 九州確率論セミナー, 九州大学, 2002 年 2 月 15 日.

4. 加法的関数の確率拡張, 研究会「確率論と計算数学」, 金沢大学, 2002 年 12 月.

一瀬孝　Takashi Ichinose

1. Recent results on the the selfadjoint Trotter–Kato product formula in the operator norm with error bound, Seminar in Quantum Theory in Different Contents, Czech Technical University, Prague/ Czech, 2001 年 3 月 20 日.

2. Recent results on the the selfadjoint Trotter–Kato product formula in the operator norm with error bound, Seminaire Physique Mathématique, Centre de Physique Théorique, CNRS-Luminy, Marseille/ France, 2001 年 4 月 11 日.

3. (with H. Neidhardt and V. A. Zagrebnov)
   Operator norm convergence of Trotter–Kato product formula, Ukrainian Mathematical Congress–2001: International Conference on Functional Analysis, Kiev/ Ukraine, 2001 年 8 月 22–26 日.

4. (with Hideo Tamura, Hiroshi Tamura and V. A. Zagrebnov)
   On the norm convergence of the selfadjoint Lie–Trotter–Kato product formula with optimal error bound, The 7th International Conference: Path Integrals 2002 from Quarks to Galaxies, Antwerp/Belgium, 2002 年 5 月 28 日.

5. (with Hideo Tamura, Hiroshi Tamura and V. A. Zagrebnov)
   On the norm convergence of the selfadjoint Lie–Trotter–Kato product formula with optimal error bound, The International Symposium "The Mathematical Legacy of Feynman's Path Integral Approach: Analysis, Geometry and Probability", Lisbon/ Portugal, 2002 年 6 月 25 日.

藤曲哲郎　Tetsuo Fujimagari

1. 生存曲線と個体群の齢構成, 金沢大学理学部生態学セミナー, 金沢大学理学部, 2001 年 10 月.

田村博志　Hiroshi Tamura

1. ２次元磁気流体の KT 転移について, 金沢大学数理工学懇話会, 金沢大学工学部, 2001 年 5 月 22 日.
2. Point process と自由スカラー場, 第３回ＦＴセミナー, 岡山大学理学部, 2002 年 12 月 24, 25 日.

(3) 出 版 物

藤曲哲郎　Tetsuo Fujimagari

1. 確率過程と数理生態学, 日本評論社, 2003 年.

研 究 成 果

研究代表者の指導力不足のため，並びに，研究課題が (余りに) 代表者だけの嗜好的なものだったため，各分担者に興味を引かせるに至らず，研究組織としてのコンセンサスを形成することができなかった．そのため，組織としての成果は思った程上げられなかった．しかし，各分担者 (代表者を含めて) の研究は連綿として続けられ，以下のような成果を得た.

高信敏　Satoshi Takanobu

Dirichlet による「２整数が互いに素になる確率 = $\frac{6}{\pi^2}$」という密度定理を，通常の確率論における大数の強法則に翻訳し，極限定理における次のステップである中心極限定理スケーリングを考え，そしてさらにその奥にある (はずの) 極限定理を見出す試みをした.

我々の基礎とする確率空間は $(\widehat{\mathbb{Z}},\lambda)$ (ただし $\widehat{\mathbb{Z}}$ は有限整アデール環，λ はその上のハール確率測度) とし，アデールの組 $(x,y)\in\widehat{\mathbb{Z}}\times\widehat{\mathbb{Z}}$ が互いに素のとき，1, そうでないとき 0 を返す関数を $X(x,y)$ とする．このとき

$$S_N(x,y)=\frac{1}{N^2}\sum_{m,n=1}^{N}X(x+m,y+n)$$

は $N\to\infty$ のとき，$\frac{6}{\pi^2}$ に概収束する．これが大数の強法則である.

次に中心極限定理スケーリング $N(S_N(x,y)-\frac{6}{\pi^2})$ を考える．N を無限大にもっていく仕方に応じて，即ち，部分列 $\{N_k\}$ ごとにこれは収束し，その極限は $\{N_k\}$ から定ま

る商空間 $\widehat{\mathbb{Z}}/\sim$ の元によって完全にパラメトライズされる．とくに，$N(S_N(x,y)-\frac{6}{\pi^2})$ は $N\to\infty$ のとき収束しない − 中心極限定理は成立しない − のである！

ところが，この収束を Cesàro の意味で捉え直す，即ち，相加平均の極限として捉えるならば次のことが分かった:

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} n\Big(S_n(x,y)-\frac{6}{\pi^2}\Big) \to U(x)+U(y) \quad \text{in } L^2.$$

ここで

$$U(x)=\sum_{u=1}^{\infty}\frac{\mu(u)}{u}\Big(\frac{x \bmod u}{u}-\frac{u-1}{2u}\Big) \quad \text{in } L^2$$

である ($\mu(u)$ はメビウス関数)．この U がどのようなものであるかを探るのが本当にやらねばならぬ仕事となる．本研究で分かったことは

「U の分布は対称で，$L^{\infty-}$ に属する」

である．(平均ゼロの) 正規分布もこの性質をもっているが，「U の分布は正規分布とは似て非なるものである」だろうという予想を立てている．

もう 1 つ，部分列 $\{N_k\}$ が商空間 $\widehat{\mathbb{Z}}/\sim$ の中で $N_k\neq 0, N_k\to 0$ ならば

$$N_k\Big(S_{N_k}(x,y)-\frac{6}{\pi^2}\Big)\to 0 \quad \text{in } L^2$$

となってしまう．自明でない極限を取り出すために $N_k(S_{N_k}(x,y)-\frac{6}{\pi^2})$ の標準偏差で割るというリノーマルゼーションを施す，即ち

$$\frac{N_k(S_{N_k}(x,y)-\frac{6}{\pi^2})}{\|N_k(S_{N_k}(\cdot,*)-\frac{6}{\pi^2})\|_{L^2}}$$

を考えると，「これは $k\to\infty$ のとき標準正規分布に収束する」だろうという予想も立てている．

これら 2 つの予想を確かめる (証明する) までは行かなかった．ただ，これら予想を立てた 1 つの根拠として，数値実験による検証を与えた．

ここで述べたことの詳細については，9 ページ (以降) にある論文 “2 整数が互いに素になる確率，再訪” を参照のこと．

藤本坦孝　Hirotaka Fujimoto

新しいタイプの複素射影空間内の小林双曲的超曲面の構成を試み，$P^n(\mathbb{C})$ 内に，次数が 2^n の双曲的超平面族を構成した．また，一意性多項式，即ち，複素平面上の非定数有理型関数 f, g に対し，$P(f)=P(g)$ のときつねに $f=g$ が成り立つような多項式 $P(w)$ について考察した．$P(w)$ が，$P'(w)$ の異なる零点に対して異なる値を取るという仮定のもとに，一意性多項式になる為の条件を完全に決定した．

一瀬孝　Takashi Ichinose

作用素ノルムでの自己共役トロッター・加藤積公式に関する更に新しい結果を得た．極座標表示のディラック方程式の基本解を構成し経路積分の問題を考えた．

中尾愼太郎　Shintaro Nakao

Dirichlet 空間に付随したマルコフ過程の加法的汎関数の確率解析，特にエネルギー零の加法的汎関数を中心に研究した．また，力学系の位相推移性及び初期値鋭敏性の研究も行なった．

藤曲哲郎　Tetsuo Fujimagari

個体群動態における漸近的年齢分布について，連続時間分枝過程を応用し，個体の繁殖率，繁殖年齢，寿命等の違いが分布にどのように影響するかについて一面を明らかにできた．

生態学的群集の確率モデルのシミュレーションを行ない，種の個体数分布と多様性について新たな知見を得た．

田村博志　Hiroshi Tamura

Trotter-加藤の積公式のノルム収束の研究において，２つの非負自己共役作用素の和が自己共役になる場合の剰余項のノルムの最善の評価を与えた．

古典連続系の強磁性ハイゼンベルグ模型の統計力学の研究において，低温に於ける相転移の存在を示した．Gruber-Griffiths の理論に基き，Ginibre の不等式，Wells の不等式を一般化したものを適用するという手法を取った．

最後に，本研究課題の成果の主たる部分を述べた論文を次頁から後に付けておく．実は，我々の主たる成果は，研究代表者と杉田洋氏（九州大学大学院数理学研究院）による

The probability of two integers to be co-prime, revisited
— on the behavior of CLT-scaling limit,　Osaka J. Math. に掲載予定

の論文である．しかし，この論文をそのまま当報告集に載せるのでは，余りに芸がない．ということで

- 自明でないと思われるものについては，極力証明をつける，
- 証明は多少長くなってもていねいに，
- 少し野暮ったくても，計算が出来た当初の熱い気持ちをなるたけ伝える，
- 計算が途中でデッドロックに乗り上げて，証明が頓挫しているものについても，何も隠さずに開陳する

等(など)の方針で，次頁の論文をまとめてみた．

ご賞味あれ．